

ANEKS E Wyprowadzenie wzoru na kalibrację

względem czasu pomiarów widma gamma

W aneksie tym, pokazano metodę wyznaczenia liczby nuklidów produkowanych podczas naświetlania zestawu eksperymentalnego wiązką wysokoenergetycznych hadronów. Badany proces wygląda następująco.

Wewnątrz zestawu umieszczono detektory (próbki) aktywacyjne. W czasie kiedy ostrzeliwano zestaw wiązką z akceleratora, próbki znajdują się w polu pierwotnych i wtórnych hadronów (głównie protonów i neutronów). Dochodzi do licznych reakcji w wyniku których wewnątrz próbek powstają promieniotwórcze izotopy. Celem jest wyznaczenie wielkości produkcji tych izotopów (czyli wydajności danej reakcji np: (n,2n)) podczas całego czasu naświetlania wiązką z akceleratora. Już podczas naświetlania rozpada się jakaś część wytworzonych izotopów. Rozpadają się one również w czasie jaki upłynie między końcem eksperymentu i początkiem pomiaru. Podczas samego pomiaru na detektorze również trwa rozpad i trzeba uwzględnić ten czas pomiaru. Naszą obserwabłą (wartością którą możemy uzyskać bezpośrednio z eksperymentu lub pomiaru) jest widmo gamma pochodzące z danej próbki a w nim linie gamma (ich wielkość czyli ilość zliczeń). Wszystkie czasy jakie wcześniej wymieniono są również dokładnie zmierzone.

Radioaktywne nuklidy po wytworzeniu ulegają rozpadowi i emitują kwanty gamma. Metoda ta oparta jest więc na pomiarach widma gamma w określonym czasie.

Ogólnie liczbę nuklidów N podlegających rozpadowi γ można opisać za pomocą równania

$$dN = -\lambda N dt, \quad (1)$$

gdzie λ oznacza stałą rozpadu.

Rozwiązaniem równania (1) jest funkcja

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \quad (2)$$

gdzie N_0 oznacza początkową liczbę nuklidów, jednak w tym przypadku N_0 oznacza całkowitą liczbę nuklidów (danego izotopu) jaka została wytworzona od początku do końca naświetlania naszego modelu wiązką z akceleratora. Czyli nie jest to liczba nuklidów na początku eksperymentu (wtedy wynosi ona oczywiście zero) ale liczba nuklidów jak była w próbce po zakończeniu naświetlania.

Zapiszmy teraz równanie na całkowitą liczbę nuklidów jaka rozpadła się podczas trwania pomiaru (czas t_{real}). Liczba N_r nuklidów rozpadających się w przedziale czasie $(t_+, t_+ + t_{real})$ możemy zapisać jako różnicę ilości nuklidów na początku i na końcu pomiaru.

$$\begin{aligned} N_r &= N(t_+) - N(t_+ + t_{real}) = N_0 \exp(-\lambda t_+) - N_0 \exp(-\lambda(t_+ + t_{real})) = \\ &= N_0 \exp(-\lambda t_+) (1 - \exp(-\lambda t_{real})) \end{aligned}, \quad (3)$$

gdzie

t_+ - czas pomiędzy końcem naświetlania wiązką, a początkiem pomiarów widma gamma
 t_{real} - czas pomiaru widma gamma.

Dodatkowo należy uwzględnić tak zwany czas martwy. W czasie pomiaru widma gamma (t_{real}) detektor z przyczyn fizycznych ma krótkie przerwy podczas których czyści bufor i przesyła zliczone dane do przetwornika. W tym czasie padające kwanty gamma nie są zliczane. Rzeczywisty czas w którym kwanty gamma są liczone wynosi (t_{live}). Tak więc gdy uwzględnimy czas martwy, to liczba (N_m) zmierzonych w tym czasie kwantów γ przez detektor jest proporcjonalna do stosunku dwóch czasów t_{live}/t_{real} czyli

$$N_m = N_r * t_{live}/t_{real} \quad (4)$$

Podstawiając wzór (3) do (4) liczba zmierzonych kwantów γ przedstawia się w następujący sposób:

$$N_m = N_0 w \frac{t_{live}}{t_{real}} \exp(-\lambda t_+) (1 - \exp(-\lambda t_{real})) \quad (5)$$

Ze powyższego wzoru możemy wyznaczyć liczbę nuklidów jaka była obecna w naszej próbce po zakończeniu naświetlania (N_0) czyli na początku czasu (t_+)

$$N_0 = \frac{N_m}{w} \exp(\lambda t_+) \frac{t_{real}}{(1 - \exp(-\lambda t_{real}))} \quad (6)$$

Jednak nie jest to rzeczywista liczba wyprodukowanych nuklidów danego izotopu. W czasie bombardowania tarczy wiązką z akceleratora, w tarczy oraz w naszych próbkach produkowane są nuklidy, które równocześnie podlegają rozpadowi zgodnie z czasem połowicznego rozpadu. Jeżeli założymy, że wiązka z akceleratora jest względnie stała oraz ilość produkowanych nuklidów (danego izotopu) podczas całego eksperymentu jest dużo mniejsza niż całkowita ilość nuklidów w naszej próbce, to możemy przyjąć, że produkcja nuklidów (N_p) jest liniową funkcją czasu ($N_p = a * t$). Wtedy równanie opisujące produkcję i rozpad nuklidów podczas trwania naświetlania można przedstawić następująco

$$dN_p = a dt - \lambda N_p dt \quad (7)$$

gdzie

a - jest współczynnikiem prędkości wytwarzania określonego nuklidu.

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego (7) jest funkcja

$$N_p(t) = \frac{a}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t)) \quad (8)$$

Liczba nuklidów po czasie naświetlania wiązka z akceleratora (t_{ira}) wynosi więc

$$N_p(t_{ira}) = \frac{a}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t_{ira})) \quad (9)$$

Należy zauważyć, że liczba nuklidów (N_p) ze wzoru (9) jest równa liczbie nuklidów (N_0) ze wzoru (6). Gdy podstawimy te wzory do siebie to otrzymamy równanie

$$\frac{a}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t_{ira})) = \frac{N_m}{w} \exp(\lambda t_+) \frac{\frac{t_{real}}{t_{live}}}{(1 - \exp(-\lambda t_{real}))}, \quad (10)$$

z którego, po prostych przekształceniach możemy wyznaczyć współczynnik prędkości produkcji danego izotopu (a)

$$a = \frac{N_m}{w} \frac{\lambda}{(1 - \exp(-\lambda t_{ira}))} \exp(\lambda t_+) \frac{\frac{t_{real}}{t_{live}}}{(1 - \exp(-\lambda t_{real}))} \quad (11)$$

Pamiętając, że liczba wytworzonych nuklidów w czasie eksperymentu (t_{ira}) jest funkcją liniową i wynosi

$$N_p(t_{ira}) = a * t_{ira} \quad (12)$$

oraz wykorzystując wzór (11) i podstawiając go do wzoru (12) otrzymujemy ostateczną zależność na ilość wytworzonych nuklidów danego izotopu podczas naświetlania na podstawie wartości ilości rozpadów tego izotopu zmierzonej w spektrometrze. Poniższy wzór uwzględnia tylko poprawki względem czasu. Pełna zależność musi uwzględnić jeszcze poprawki na liczne efekty fizyczne występujące podczas pomiaru i zmieniające rzeczywisty rezultat.

$$N_p(t_{ira}) = N_m \frac{\lambda t_{ira}}{(1 - \exp(-\lambda t_{ira}))} \exp(\lambda t_+) \frac{\frac{t_{real}}{t_{live}}}{(1 - \exp(-\lambda t_{real}))} \quad (13)$$

gdzie

- t_+ - czas pomiędzy końcem naświetlania wiązką, a początkiem pomiarów widma gamma
- t_{real} - czas pomiaru widma gamma
- t_{live} - rzeczywisty czas w który detektor odczytuje nadchodzące kwanty gamma

Należy pamiętać o dwu ważnych założeniach:

Produkcja nuklidów ma charakter liniowy przy założeniu, że natężenie wiązki z akceleratora jest względnie stałe w czasie. Czyli ewentualne zmiany w tej wiązce po uśrednieniu przez czas całego naświetlania muszą być bardzo małe. W naszym eksperymencie, kiedy czas naświetlania liczony jest w godzinach warunek ten jest spełniony dość dobrze. Drugim warunkiem niezbędnym do liniowej produkcji nuklidów jest stały w czasie eksperymentu skład naszych próbek aktywacyjnych. To znaczy, że skład chemiczny próbki w trakcie eksperymentu nie zmienia się w sposób znaczący. Gdyby w wyniku naświetlania próbki przekształceniu uległo np. kilkadziesiąt procent nuklidów to wtedy zachwianiu uległa by ich dalsza liniowa produkcja z powodu znaczącego ubytku materiału pierwotnego. Ten warunek jest również bardzo dobrze spełniony, gdyż liczba cząstek przekształconych w trakcie eksperymentu jest rzędu ($\sim 10^{13} - 10^{14}$), co jest wartością o wiele rzędów wielkości mniejsza w stosunku do liczby atomów w naszej próbce ($\sim 10^{25}$).